0.1 Laplacova rovnica

Kruhová oblasť

Poďme sa pozrieť ako bude vyzerať riešenie Laplacovej rovnice na oblasti v tvare kruhu s polomerom a, pričom na ohraničujúcej kružnici bude dané predpísané hodnoty (t.j. fyzikálne hľadáme stacionárne rozloženie teploty v kruhu, ak máme predpísanú teplotu na ohraničujúcej kružnici).

Zadanie naznačuje, že bude výhodné použiť polárne súradnice. Riešime teda Laplacovu rovnicu v polárnych súradniciach pre $u = u(r, \theta)$ a $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{1}$$

Body (a, θ) v polárnych súradniciach sú body kružnice s polomerom a, takže okrajová podmienka bude $u(a, \theta) = f(\theta)$. V polárnych súradniciach teda riešime rovnicu (1) na obdĺžniku. Potrebovali by sme teda ešte podmienky na zvyšných stranách obdĺžnika. Ak si uvedomíme, že pre dané r body (r, π) a $(r, -\pi)$ reprezentujú ten istý bod kružnice, tak teplota v týchto bodoch musí byť rovnaká a zrejme aj tepelný tok v smere θ musí byť rovnaký, čo nám dáva podmienky

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi). \tag{3}$$

To nám naznačuje, že po separácií premenných dostaneme pre θ okrajový problém s periodickými okrajovými podmienkami.

Nakoniec ostáva strana obdĺžnika pozostávajúca z bodov s polárnymi súradnicami $(0, \theta)$, čo je pre každé θ stred kruhu. Tu môžeme predpokladať, že hodnota riešenia v strede kruhu je ohraničená (ak sa na riešenie pozeráme ako na rozloženie teploty, tak táto podmienka je rozumná) $u|(0, \theta)| < \infty$.

Keď teraz použijeme metódu separácie premenných, $u(r, \theta) = \phi(\theta)G(r)$, dostaneme po odseparovaní a zavedení separačnej konštanty

$$\frac{r}{G}\frac{d}{dr}\left(\frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = \lambda$$

Z okrajových podmienok (2) a (3) získame okrajové podmienky pre ϕ a tak získame okrajový problém s periodickými okrajovými podmienkami

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\lambda \phi$$
$$\phi(-\pi) = \phi(\pi)$$
$$\frac{d\phi}{d\theta}(-\pi) = \frac{d\phi}{d\theta}(\pi)$$

ktorého vlastné hodnoty sú $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 = n^2$ pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ a vlastné funkcie sú $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ pre $n > 0$ a 1 (resp. ľubovoľná nenulová konštanta) pre $n = 0$.

Pre funkciu G dostávame rovnicu

$$\frac{r}{G}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right) = \lambda_n = n^2,$$

resp. po úprave

$$r^2\frac{d^2G}{dr^2} + r\frac{dG}{dr} - n^2 G = 0$$

To je Eulerova rovnica, ktorej riešenie je možné nájsť v tvare $G(r) = r^p$. Po dosadení tohoto výrazu do rovnice získame rovnicu pre p a každé r

$$[p(p-1) + p - n^2]r^p = 0$$

z čoho $p^2 - n^2 = 0$, a teda $p = \pm n$ pre $n \neq 0$ a $p = 0$ pre $n = 0$.

Pre $n \neq 0$ dostávame dve lineárne nezávislé riešenia r^n a r^{-n}, a teda všeobecné riešenie pre $n > 0$ je $G(r) = c_{1,n}r^n + c_{2,n}r^{-n}$.

Pre $n = 0$ je jedno riešenie $r^0 = 1$, čiže riešením je ľubovoľná konštanta. Druhé nezávislé riešenie pre $n = 0$ dostaneme z priamo z rovnice

$$\frac{r}{G}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right) = n^2 = 0$$
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right) = 0$$
$$r\frac{dG}{dr} = \bar{c}_2$$
$$\frac{dG}{dr} = \frac{\bar{c}_2}{r}$$
$$G = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r.$$

Máme teda

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r & \text{ak } n = 0 \\ c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n} & \text{ak } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Vďaka podmienke $|u(0, \theta)| < \infty$, ktorá vďaka tomu že ϕ_n sú ohraničené znamená, že $|G(r)| < \infty$, dostávame, že $c_2 = 0$ a $\bar{c}_2 = 0$, pretože v opačnom prípade by $G(r)$ bola v okolí 0 neohraničená. Čiže

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 & \text{ak } n = 0 \\ c_{1,n} r^n & \text{ak } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Výsledné súčinové riešenie je potom

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + B_n r^n \sin n\theta$$

Zo začiatočnej podmienky potom dostaneme

$$u(a, \theta) = f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\theta + B_n a^n \sin n\theta$$

a rad na pravej strane je Fourierov rad pre ktorého koeficienty platia vzťahy

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

a

$$A_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$
$$B_n a^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

pre $n > 0$.

Príklad: Nájdite riešenie Laplacovej rovnice zvonku kruhovej oblasti s polomerom a a hodnotami na okraji danými funkciou $u(a, \theta) = f(\theta) = \ln 2 + 4 \cos 3\theta$.

Riešenie: Daná oblasť je v polárnych súradniciach určená nerovnosťami $r \geq a$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (načrtnite si obrázok) - je to nekonečný pás, zľava ohraničený priamkou $r = a$, zhora a zdola priamkami $\theta = \pm\pi$). Okrajová podmienka je zo zadania $u(a, \theta) = f(\theta)$. Pre horný a dolný okraj budú platiť periodické okrajové podmienky z podobných dôvodov ako v predošlej časti. Posledná podmienka bude $|u(r,\theta)| < \infty$ pre $r \to \infty$ (opäť pre prípad teploty neočakávame neohraničenosť v nekonečne). Riešime teda úlohu

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \qquad r \geq a,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \tag{4}$$

s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} u(a,\theta) &= f(\theta) \\ u(r,-\pi) &= u(r,\pi) \\ \frac{du}{d\theta}(r,-\pi) &= \frac{du}{d\theta}(r,\pi) \\ |u(r,\theta)| &< \infty, \text{pre } r \to \infty \end{aligned}$$

Po použití metódy separácie premenných $u(r,\theta) = \phi(\theta)G(r)$ dostávame pre ϕ rovnakú okrajovú úlohu ako v predošlej časti, takže máme

$$\lambda_n = n^2,\ n = 0,1,2,\ldots \qquad\qquad \phi_n(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, & \text{ak } n > 0 \\ \sin n\theta, & \text{ak } n > 0 \\ 1, & \text{ak } n = 0 \end{cases}$$

Rovnica pre G bude opäť Eulerova rovnica pre $n = 0,1,2,\ldots$,

$$r^2\frac{d^2G}{dr^2} + r\frac{dG}{dr} - n^2 G = 0$$

Takže všeobecné riešenie je

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r & \text{ak } n = 0 \\ c_{1,n} r^n + c_{2,n} r^{-n} & \text{ak } n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

z okrajovej podmienky $|u(r,\theta)| < \infty$ pre $r \to \infty$ dostávame podobne ako v predošlom prípade $|G(r)| < \infty$ pre $r \to \infty$. Keďže $|\ln r| \to \infty$ pre $r \to \infty$ a ak $n > 0$ tak $r^n \to \infty$ pre $r \to \infty$ v $G(r)$ musí byť $\bar{c}_2 = 0$ a $c_1 = 0$. Takže

$$G(r) = \begin{cases} \bar{c}_1 & \text{ak } n = 0 \\ c_{2,n} r^{-n} & \text{ak } n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Z toho dostávame všeobecné riešenie

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\theta + B_n r^{-n} \sin n\theta$$

so začiatočnej podmienky máme

$$u(a,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{-n} \cos n\theta + B_n a^{-n} \sin n\theta = \ln 2 + 4\cos 3\theta$$

a vidíme, že

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln 2, \\ A_3 a^{-3} &= 4, \text{ a } A_n = 0 \text{ pre } n \neq 3, \\ B_n &= 0, \text{pre všetky } n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Takže riešenie je

$$u(r,\theta) = \ln 2 + 4a^3 r^{-3} \cos 3\theta.$$

Literatúra

[1] Richard Haberman: *Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Education Inc., 2013.